3-VARIETÀ 2017/18 - ESERCIZI SETTIMANALI

1. Esercizi del 6 ottobre

Esercizio 1.1. Sia M una varietà connessa senza bordo. Sia $D \subset M$ un disco e $p \in M$ un punto. Mostra che le varietà $M \setminus \{p\}$ e $M \setminus D$ sono diffeomorfe.

Esercizio 1.2. Sia M una varietà connessa, compatta, senza bordo e orientabile. Calcola i numeri di Betti di $M \setminus \{p\}$ in funzione di quelli di M.

Esercizio 1.3. Siano M e N due n-varietà compatte, connesse e orientate. Calcola i numeri di Betti della somma connessa $M\#N$ in funzione di quelli di M e N.

Esercizio 1.4. Nell'esercizio precedente, supponi che $n \geq 3$ e dimostra che

$$\pi_1(M\#N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N).$$

Esercizio 1.5. Siano M, N due n-varietà connesse con bordo. Mostra che

$$\pi_1(M\#_\partial N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N).$$

Sia $n \geq 1$ e $\mathcal{M}_n$ l'insieme di tutte le n-varietà connesse compatte orientate senza bordo, considerate a meno di diffeomorfismo. Sappiamo che $\mathcal{M}_n$ è un monoide con l'operazione di somma connessa.

Esercizio 1.6. Mostra che ogni "sfera esotica" costruita come $M = D^n \cup_\varphi D^n$ per qualche diffeomorfismo $\varphi\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ è sempre un elemento invertibile in $\mathcal{M}_n$.

Esercizio 1.7. Sia $n \geq 3$ e sia $M \in \mathcal{M}_n$ un elemento invertibile. Mostra che M è semplicemente connessa e ha gli stessi numeri di Betti di S^n.

Osservazione 1. Per un teorema di Whitney, se $M \in \mathcal{M}_n$ è semplicemente connessa e ha gli stessi numeri di Betti di S^n, allora M è omotopicamente equivalente a S^n. Per un teorema di Smale, se $n \geq 5$ allora $M = D^n \cup_\varphi D^n$ è costruito come sopra. Quindi se $n \geq 5$ gli invertibili in $\mathcal{M}_n$ sono precisamente le sfere esotiche costruite così.

Esercizio 1.8. Sia M varietà senza bordo e $f\colon M \to \mathbb{R}$ funzione liscia. Sia $p \in M$ un punto critico per f. Mostra che è possibile definire una forma bilineare simmetrica

$$\mathrm{Hess}(f)\colon T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

nel modo seguente: dati $v, w \in T_pM$, scegliamo estensioni locali di v, w a campi X, Y in un intorno di p, e definiamo

$$\mathrm{Hess}(f)(v, w) = X(Y(f))(p).$$

Mostra che $\mathrm{Hess}(f)$ è effettivamente simmetrica, bilineare e ben definita, e che coincide con l'usuale Hessiano in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 1.9. Sia M varietà compatta senza bordo. Se $f : M \to \mathbb{R}$ è una funzione di Morse con soli due punti critici, allora M è omeomorfa a S^n.

Esercizio 1.10. Mostra che non esiste una funzione di Morse $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$ con tre punti critici.

2. Esercizi del 21 ottobre

Ricordiamo che è sempre consentito usare esercizi precedenti anche senza dimostrarli.

Esercizio 2.1. Sia N una $n-$varietà che si decompone in uno 0-manico e k 1-manici. Mostra che $\pi_1(N)$ è il gruppo libero con k elementi.

Esercizio 2.2. Sia N una n-varietà connessa compatta con bordo e sia M ottenuta attaccando un 2-manico a N lungo una curva semplice chiusa $\alpha \subset \partial N$. Scegli un punto base $x_0 \in \alpha$. Supponiamo che $\pi_1(N, x_0)$ abbia una presentazione

$$\langle g_1, \ldots, g_k \mid r_1, \ldots, r_h \rangle.$$

Fissa una orientazione arbitraria per la curva α. Questa in $\pi_1(N, x_0)$ è rappresentata da un elemento $s = g_{i_1} \cdots g_{i_l}$. Mostra che $\pi_1(M)$ ha presentazione

$$\langle g_1, \ldots, g_k \mid r_1, \ldots, r_h, s \rangle.$$

Esercizio 2.3. Sia X una varieà connessa di dimensione ≥ 3 e $x_0 \in X$. Mostra che ogni elemento di $\pi_1(X, x_0)$ è rappresentato da una curva liscia semplice chiusa.

Esercizio 2.4. Usando gli esercizi precedenti, mostra che qualsiasi gruppo finitamente presentato è il gruppo fondamentale di una 4-varietà compatta con bordo.

Esercizio 2.5. Mostra che per ogni coppia di interi $d, g > 0$ esiste un rivestimento $S_{g'} \to S_g$ di grado d. Calcola g' in funzione di d e g.

Esercizio 2.6. Determina per quali g, g', b, b' le due superfici $S_{g,b}$ e $S_{g',b'}$ sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 2.7. Considera il toro bucato $S_{1,1}$ ed il suo rivestimento universale X. Quante componenti di bordo ha X? Quante di queste sono compatte?

Esercizio 2.8. Dimostra che $T\#\mathbb{RP}^2$ e $K\#\mathbb{RP}^2$ sono omeomorfi. Qui K e T sono la bottiglia di Klein e il toro.

Quando incontrate un numero di Betti $b_i(M)$ potete usare qualsiasi forma di omologia o coomologia che conoscete.

Esercizio 2.9. Sia M una varietà orientabile compatta senza bordo. Supponiamo che M contenga una ipersuperficie N orientabile compatta e senza bordo, con k componenti connesse, che non sconnette M (cioè $M \setminus N$ è connesso). Mostra che $b_1(M) \geq k$.

Esercizio 2.10. Sia S una superficie compatta e senza bordo. La superficie S può essere sconnessa e non orientabile. Mostra che S è il bordo di una 3-varietà connessa e compatta $\Longleftrightarrow \chi(S)$ è pari.

3. Esercizi del 4 novembre

Esercizio 3.1. Mostra che per ogni gruppo abeliano G finitamente generato esiste una 3-varietà compatta senza bordo M tale che $H_1(M, \mathbb{Z}) \cong G$.

Esercizio 3.2. Mostra che una varietà compatta che riveste uno spazio lenticolare è anch'essa uno spazio lenticolare.

Esercizio 3.3. Sia H_g il corpo con manici di genere g, ottenuto con uno 0-manico e g 1-manici. Sia M la 3-varietà ottenuta come doppio di H_g. Determina la decomposizione in fattori primi di M.

Esercizio 3.4. Sia $S = S_{g,1}$ per qualche $g \geq 1$. Considera la 3-varietà $M = S \times S^1$. Sia N ottenuta da S tramite un riempimento di Dehn che attacca un meridiano lungo la curva semplice chiusa $\gamma = \{p\} \times S^1$ per qualche $p \in \partial S_{g,1}$. Mostra che N non è irriducibile.

Esercizio 3.5. Siano (p, q) coprimi. Un *nodo torico* di tipo (p, q) è un nodo $K \subset S^3$ costruito prendendo una curva di tipo (p, q) nel toro standard in S^3. Mostra che $\pi_1(S^3 \setminus K)$ ha una presentazione del tipo $\langle x, y \mid x^p y^q \rangle$.

Esercizio 3.6. Sia M una 3-varietà orientabile irriducibile. Mostra che se l'interno di M contiene $\mathbb{RP}^2$, allora M è diffeomorfa a $\mathbb{RP}^3$.

Esercizio 3.7. Determina tutte le curve semplici chiuse nella bottiglia di Klein a meno di isotopia.

Esercizio 3.8. Sia $M \to S^2$ un fibrato con fibre diffeomorfe a S^1. Mostra che M è uno spazio lenticolare. (Puoi usare il fatto che un fibrato su uno spazio contrattile è sempre banale.) Più difficile: mostra che gli spazi lenticolari ottenuti in questo modo sono precisamente gli spazi $L(p, 1)$ al variare di p.

Esercizio 3.9. Sia M una 3-varietà compatta connessa orientabile con bordo. Mostra che $b_1(M) \geq \frac{1}{2} b_1(\partial M)$.

Esercizio 3.10. Sia $M \subset \mathbb{R}^3$ una sotto-varietà compatta connessa di dimensione 3 con bordo. Mostra che se $b_1(M) = 0$, allora $\pi_1(M) = \{e\}$.

Suggerimento. Usa l'esercizio precedente. $\square$

4. Esercizi del 18 novembre

Esercizio 4.1. Sia M il fibrato su S_g con numero di Eulero e. Mostra che

$$H_1(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g} \times \mathbb{Z}/_{e\mathbb{Z}}.$$

Esercizio 4.2. Sia M una varietà orientabile che fibra sul toro T con fibra S^1. Mostra che esiste sempre per M una fibrazione su S^1 con fibra T.

Esercizio 4.3. Sia M una varietà di Seifert e $\tilde{M} \to M$ un rivestimento finito. Mostra che anche $\tilde{M}$ è una varietà di Seifert.

Esercizio 4.4. Mostra che il complementare di un nodo torico è una varietà di Seifert (vedi Esercizio 3.5 per la definizione).

Esercizio 4.5. Siano $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ con $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Mostra che esiste un triangolo in $\mathbb{H}^2$ con angoli interni α, β, γ, e che questo è unico a meno di isometria.

Esercizio 4.6. Per quali $n \geq 2$ esiste un poligono in $\mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2$, oppure S^2 con n lati e avente tutti gli angoli retti?

Esercizio 4.7. Mostra che per ogni retta $r \subset \mathbb{H}^2$ e ogni punto $p \in \mathbb{H}^2 \setminus r$ esiste un'unica retta s passante per p e ortogonale ad r.

Esercizio 4.8. Mostra che per ogni coppia di rette $r, r' \subset \mathbb{H}^3$ esiste una isometria φ di $\mathbb{H}^3$ tale che $\varphi(r) = r'$ e $\varphi(r') = r$.

Esercizio 4.9. Siano $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{H}^n$ punti non contenuti in un iperpiano. Mostra che una isometria φ di $\mathbb{H}^n$ è determinata dai valori che assume sui punti $P_0, \ldots, P_n$.

Esercizio 4.10. Usa la formula della distanza fra due punti su I^n per dimostrare direttamente che si tratta di una distanza.

5. Esercizi del 2 dicembre

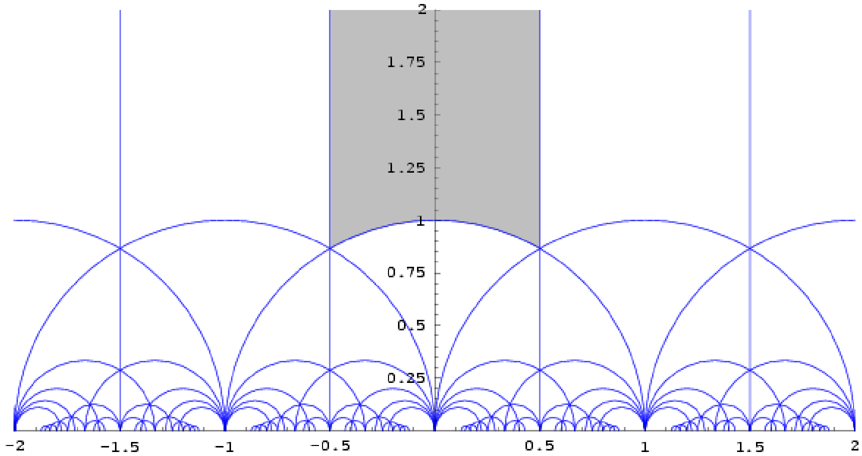
Come sempre, è lecito risolvere un esercizio usando quelli precedenti.

Esercizio 5.1. Mostra che l'inversione che manda H^2 in D^2 è la mappa

$$f(z) = \frac{\bar{z} + i}{i\bar{z} + 1}.$$

Esercizio 5.2. Mostra che l'inviluppo convesso di un numero finito di punti in $\mathbb{H}^n$ che non siano contenuti in un iperpiano è un poliedro.

Esercizio 5.3. Mostra che il triangolo grigio T nella figura seguente è un dominio fondamentale per il sottogruppo discreto $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.



Esercizio 5.4. Mostra che se $\Gamma < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ è un sottogruppo di indice d e non contiene elementi ellittici, allora la superficie $S = \mathbb{H}^2/_\Gamma$ ha area $d\frac{\pi}{3}$.

Esercizio 5.5. Mostra che il sottogruppo $\Gamma(2) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ non contiene elementi ellittici (a lezione abbiamo considerato $\Gamma(n) = \ker\big(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})\big)$ e abbiamo dimostrato che $\Gamma(n)$ non contiene ellittici se $n \geq 4$).

Esercizio 5.6. Calcola l'area della superficie $S = \mathbb{H}^2/_{\Gamma(2)}$. La superficie S è diffeomorfa all'interno di una superficie compatta, che è quindi $S_{g,b}$ oppure $S^{\mathrm{no}}_{g,b}$. Determina quale di queste.

Esercizio 5.7. Mostra che i triangoli in $\mathbb{H}^2$ sono uniformemente sottili: esiste un $K > 0$ tale che per qualsiasi triangolo $\Delta \subset \mathbb{H}^2$, qualsiasi punto p in un lato di Δ è a distanza $< K$ da uno degli altri due lati di Δ.

Esercizio 5.8. Mostra che $\mathbb{H}^n$ ha tutte le curvature sezionali pari a -1.

Esercizio 5.9. Sia $\Delta \subset \mathbb{H}^2$ un triangolo e l la lunghezza di un lato qualsiasi di Δ. Mostra che $\mathrm{Area}(\Delta) < l$.

Esercizio 5.10. Sia $\Gamma < \mathbb{R}^2$ un gruppo di traslazioni generato da due vettori indipendenti. Mostra che un dominio di Dirichlet per Γ è generalmente un esagono e in casi particolari un quadrilatero.

6. Esercizi del 16 dicembre

Esercizio 6.1. Mostra che il cubo ideale regolare C in $\mathbb{H}^3$ si decompone in cinque tetraedri ideali regolari T e deduci che $\mathrm{Vol}(C) = 5\mathrm{Vol}(T)$.

Esercizio 6.2. Mostra che esiste un modo di identificare isometricamente a coppie le 4 facce di un tetraedro ideale regolare e ottenere così una 3-varietà iperbolica M. La varietà M è orientabile? La varietà M è diffeomorfa alla parte interna di una varietà con bordo W. Determina ∂W a meno di omeomorfismo.

Esercizio 6.3. Considera un triangolo iperbolico con angoli $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$ e siano a, b, c le lunghezze dei lati oppposti a questi angoli. Mostra che

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

Esercizio 6.4. Sia f una isometria parabolica di $\mathbb{H}^n$. Mostra che esiste sempre un piano iperbolico invariante per f.

Esercizio 6.5. Considera il dodecaedro regolare in S^3 con angoli diedrali $\frac{2\pi}{3}$. Identifica le facce opposte tramite isometrie in modo che il risultato sia una varietà sferica M.

Esercizio 6.6. Determina un sottogruppo Γ del gruppo discreto $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[i]) < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ che abbia indice finito e che non contenga elementi ellittici. La varietà $M = \mathbb{H}^3/_{\Gamma}$ è compatta? Ha volume finito?

Esercizio 6.7. Mostra che due elementi $f, g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ commutano $\Longleftrightarrow$ hanno gli stessi punti fissi in $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Esercizio 6.8. Mostra che una varietà riemanniana omogenea è sempre completa.

Esercizio 6.9. Mostra che una superficie di genere S_g ammette una infinità di metriche iperboliche fra loro non isometriche.

Esercizio 6.10. Costruisci una 3-varietà iperbolica attaccando fra loro le facce di un ottaedro ideale regolare iperbolico.